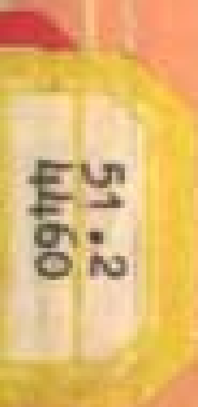




数学归纳法

华罗庚

上海教育出版社

中学生数学課外讀物

数 学 归 納 法

华 罗 庚

上 海 教 育 出 版 社

一九六四年·上海

中学生数学課外讀物

数学归納法

华罗庚

*

上海教育出版社出版
(上海永福路123号)
上海市书刊出版业营业許可証出090号
上海市印刷三厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：1 7/8　字數：39,000
1963年11月第1版　1964年5月第3次印刷
印数：48,001—146,000本

統一书号：7150·1457
定　价：(七) 0.15元

編輯說明

数学，在中学里是一門基本工具学科，通过这一学科的教学，必須使中学生掌握数学这个工具，为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础．为了使中学生学好数学，除了必須用最大的努力提高教学质量以外，还需要各方面的配合．我們編輯这套"中学生数学課外讀物"，目的就在于配合教学，使中学生更好地掌握基础知識，进一步提高基本技能，同时扩大他們的眼界，培养他們对数学的爱好，以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要．

这套讀物的內容主要包括下列两个方面：一、就中学数学課程中的一些問題，介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識，并提供一些必要的习題，以加强基本訓练和提高运用知識解决实际問題的能力；二、就一些与中学数学有关的专題，介紹数学方法，邏輯知識，数学某些分支的概况，数学史方面的知識，等等．

这套讀物的編写还是一种新的尝試．无論在选題、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要，希望教育工作者和讀者对我們提出宝貴的意見，同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物，帮助我們做好这套讀物的編輯工作．

中学生数学課外讀物編审委員会

1963年8月

目　录

一 写在前面

高中代数教科书里，讲过数学归納法，也有不少的数学参考书讲到数学归納法．但是，我为什么还要写这本小册子呢？

首先，当然是由于这个方法的重要．学好了、学透了，对进一步学好高等数学有帮助，甚至对认識数学的性质，也会有所裨益．但更主要的，我总觉得有些看法、有些材料，值得补充．而这些看法和材料，在我学懂数学归納法的过程中，曾經起过一定的作用．

这里，我先提出其中的一点．

我在中学阶段学习数学归納法这部分教材的时候，总认为学会了

"1 对；假設 n 对，那末 $n+1$ 也对"

的证明方法就滿足了．后来，却愈想愈觉得不滿足，总感到还差了些什么．

抽象地談恐怕談不清楚，还是举个例子来說明吧．

例如：求证

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \qquad (1)$$

这个問題当时我会做．证法如下：

证明：当 $n=1$ 的时候，(1)式左右两边都等于 1；所以，当 $n=1$ 的时候，(1)式成立．

假設当 $n=k$ 的时候(1)式成立，就是

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2. \qquad (2)$$

那末，因为

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2[k^2+4(k+1)]\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2[k+2]^2\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2,\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 的时候，(1)式也成立。

因此，对于所有的自然数 n，(1)式都成立。(证毕)

上面的证明步驟是不是完整了呢？当然，是完整了。老师应当不加挑剔地完全认可了。

但是，我后来仔細想想，却感到有些不滿足。問題不是由于证明错了，而是对上面这个恒等式(1)是怎样得来的，也就是对前人怎样发現这个恒等式，产生了疑問。难道这是从天上掉下来的嗎？当然不是！是有“天才”的人，直观地看出来的嗎？也不尽然！

这个問題启发了我：难处不在于有了公式去证明，而在于没有公式之前，怎样去找出公式来；才知道要点在于言外。而我們以前所学到的，仅仅是其中比較容易的一个方面而已。

我这样説，請不要跟学校里对同学們的要求混同起来，作为中学数学教科书，要求同学們学会数学归納法的运用，就可

以了．而这本书是中学生的数学課外讀物，不是教科书，要求也就不同了．

話虽如此，一切我們还是从头讲起．

二 归納法的本原

先从少数的事例中摸索出規律来，再从理論上来证明这一規律的一般性，这是人們认識客观法則的方法之一．

以識数为例．小孩子識数，先学会数一个、两个、三个；过些时候，能够数到十了；又过些时候，会数到二十、三十、……一百了．但后来，却决不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进．到了某一个时候，他領悟了，他会說："我什么数都会数了"．这一飞跃，竟从有限跃到了无穷！怎样会的？首先，他知道从头数；其次，他知道一个一个按次序地数，而且不愁数了一个以后，下一个不会数．也就是他領悟了下一个数的表达方式，可以由上一个数来决定，于是，他也就会数任何一个数了．

設想一下，如果这个飞跃現象不出現，那末人們一輩子就只能学数数了．而且人生有限，数目无穷，就是学了一輩子，也决不会学尽呢！

解釋这个飞跃現象的原理，正就是数学归納法．数学归納法大大地帮助我們认識客观事物，由簡到繁，由有限到无穷．

从一个袋子里摸出来的第一个是紅玻璃球、第二个是紅玻璃球、甚至第三个、第四个、第五个都是紅玻璃球的时候，我

們立刻会出現一种猜想:“是不是这个袋里的东西全部都是紅玻璃球?”但是,当我們有一次摸出一个白玻璃球的时候,这个猜想失敗了;这时,我們会出現另一个猜想:“是不是袋里的东西,全部都是玻璃球?”但是,当有一次摸出来的是一个木球的时候,这个猜想又失敗了;那时我們会出現第三个猜想:“是不是袋里的东西都是球?”这个猜想对不对,还必須継續加以檢驗,要把袋里的东西全部摸出来,才能見个分曉.

袋子里的东西是有限的,迟早总可以把它摸完,由此可以得出一个肯定的結論.但是,当东西是无穷的时候,那怎么办?

如果我們有这样的一个保証:“当你这一次摸出紅玻璃球的时候,下一次摸出的东西,也一定是紅玻璃球”,那末,在这样的保証之下,就不必費力去一个一个地摸了.只要第一次摸出来的确实是紅玻璃球,就可以不再檢查地作出正确的結論:“袋里的东西,全部是紅玻璃球”.

这就是数学归納法的引子.我們采用形式上的讲法,也就是:

有一批編了号碼的数学命題,我們能够証明第1号命題是正确的;如果我們能够証明在第k号命題正确的时候,第$k+1$号命題也是正确的,那末,这一批命題就全部正确.

在上一节里举过的例子:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \qquad (1)$$

当$n=1$的时候,这个等式就成为

$$1^3=\left[\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+1)\right]^2.$$

这是第 1 号命题.（这个命题可以通过驗证，证实它是成立的.）

当 $n=k$ 的时候，这个等式成为

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2, \qquad (2)$$

这是第 k 号命题.（这个命题是假設能够成立的.）

而下一步就是要在第 k 号命题成立的前提下，证明第 $k+1$ 号命題

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$$

也成立．所以这个证法就是上面所說的这一原則的体現.

再看下面的一个例子.

例 求证:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \qquad (3)$$

第 1 号命題是：当 $n=1$ 的时候，上面这个等式成为

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}.$$

这显然是成立的.

現在假設第 k 号命題是正确的，就是假設

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

那末，第 $k+1$ 号命題的左边是

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2},$$

恰好等于第 $k+1$ 号命題的右边. 所以第 $k+1$ 号命題也正确.

由此, 我們就可以作出結論: 对于所有的自然数 n, (3)式都成立.

附言: 上面的证明中, 假設"第 k 号命題是正确的", 我們有时用"归納法假設"一語来代替.

三 两条缺一不可

这里, 必須強調一下, 在我們的证法里:

(1) "当 $n=1$ 的时候, 这个命題是正确的";

(2) "假設当 $n=k$ 的时候, 这个命題是正确的, 那末当 $n=k+1$ 的时候, 这个命題也是正确的", 这两条缺一不可.

不要认为, 一个命題在 $n=1$ 的时候, 正确; 在 $n=2$ 的时候, 正确; 在 $n=3$ 的时候也正确, 就正确了. 老实說, 不要說当 $n=3$ 的时候正确还不算数, 就是一直到当 n 是 1 千的时候正确, 或者 1 万的时候正确, 是不是对任何自然数都正确, 还得证明了再說.

不妨举几个例子.

例 1 当 $n=1,2,3,\cdots\cdots,15$ 的时候, 我們可以驗证式子

$$n^2+n+17$$

的值都是素数①. 是不是由此就可以作出这样的結論:"n 是任何自然数的时候, n^2+n+17 的值都是素数"呢?

这个命題是不正确的. 事实上, 当 $n=16$ 的时候,

$$n^2+n+17=16^2+16+17$$

$$=17^2,$$

它就不是素数.

不仅如此, 我們还可以举出同样性质的例子:

(1) 当 $n=1,2,3,\cdots\cdots,39$ 的时候, 式子

$$n^2+n+41$$

的值都是素数; 但是, 当 $n=40$ 的时候, 它的值就不是素数.

(2) 当 $n=1,2,3,\cdots\cdots,11000$ 的时候, 式子

$$n^2+n+72,491$$

的值都是素数, 即使如此, 我們还不能肯定 n 是任何自然数的时候, 这个式子的值总是素数. 事实上, 只要 $n=72,490$ 的时候, 它的值就不是素数.

这也就是說, 即使我們試了 11,000 次, 式子

$$“n^2+n+72,491”$$

的值都是素数, 但我們仍旧不能断定这个命題一般的正确性.

例 2 式子

$$2^{2^n}+1,$$

当 $n=0, 1, 2, 3, 4$ 的时候, 它的值分别等于 3, 5, 17, 257, 65537, 这 5 个数都是素数. 根据这些資料, 費尔馬(Fermat)

---

① 素数又称质数, 就是除 1 和它本身以外, 不能被其他自然数整除的数.

就猜想：对于任何自然数 n，式子

$$2^{2^n}+1$$

的值都是素数．但这是一个不幸的猜测．欧拉（Euler）举出，当 $n=5$ 的时候，

$$2^{2^5}+1=641\times 6,700,417.$$

因而費尔馬猜錯了．

后来，有人还証明当 $n=6,7,8,9$ 的时候，$2^{2^n}+1$ 的值也都不是素数．

例 3　$x-1=x-1,$

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

………………………………………………………………

从上面这些恒等式，可以看出什么来？

我們可以看出一点："把 x^n-1 分解为不可再分解并且具有整系数的因式以后，各系数的絕对值都不超过 1"．

这个命題是不是正确呢？这就是所謂契巴塔廖夫（Н. Г. Чеботарев）問題．后来被依万諾夫（В. Иванов）找出了反例，他发現 $x^{105}-1$ 有下面的因式

$$\begin{aligned}&x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}\\&\quad+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}\\&\quad-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}\\&\quad+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{5}-2x^{7}-x^{6}\\&\quad-x^{5}+x^{2}+x+1.\end{aligned}$$

其中 x^{41} 和 x^7 的系数都是 -2，它的絕对值大于 1.

虽然如此，我們可以证明上面的命題，当 n 是素数的时候，总是对的；当 $n<105$ 的时候，也总是对的.

例 4 一个平面把空間分为两份；两个平面最多可以把空間分为四份；三个平面最多可以把空間分为八份. 从这些資料，我們能不能得出这样的結論：

"n 个平面最多可以把空間分为 2^n 份"？

这个命題是不正确的. 事实上，四个平面不可能把空間分为 16 份，而最多只能分为 15 份；五个平面也不可能把空間分成 32 份，而最多只能分为 26 份. 一般地說，n 个平面最多可以把空間分为 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 份，而不是 2^n 份，并且的确有这样的 n 个平面存在.

怎样证明这一点，讀者可以自已思考①. 在思考的过程中，可以先从比較容易的問題入手，試一試证明下面这个命題：

平面上 n 条直綫，最多可以把平面分为 $1+\frac{1}{2}n(n+1)$ 份.

上面这几个例子，总的說明了一个問題：对于一个命題，仅仅驗证了有限次，即使是千次、万次，还不能肯定这个命題的一般正确性. 而命題的一般正确性，必須要看我們能不能证明数学归納法的第二句話："假設当 $n=k$ 的时候，这个命題是正确的，那末当 $n=k+1$ 的时候，这个命題也是正确的".

另一方面，也不要以为"当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的"，这句話簡单而丢开不管. 在证題的时候，如果只证明了

---

① 本书以后将证明这一結論(見第 52 頁).

“假設当 $n=k$ 的时候，这个命题是正确的，那末当 $n=k+1$ 的时候，这个命题也是正确的”，而不去驗证“当 $n=1$ 的时候，这个命题是正确的”，那末这个证明是不对的，至少也得說，这个证明是不完整的.

让我們来看几个由于不确切地闡明数学归納法里的第一句話“当 $n=1$ 的时候，这个命题是正确的”，而得出非常荒謬的結果的例子.

例 5 所有的正整数都相等.

这个命题显然是荒謬的. 但是如果我們丢开“当 $n=1$ 的时候，这个命题是正确的”不管，那末可以用“数学归納法”来“证明”它.

这里，第 k 号命题是：“第 $k-1$ 个正整数等于第 k 个正整数”，就是

$$k-1=k.$$

两边都加上 1，就得

$$k=k+1.$$

这就是說，第 k 个正整数等于第 $k+1$ 个正整数. 这不是說明了所有的正整数都相等了嗎?

錯誤就在于，我們沒有考慮 $k=1$ 的情况.

例 6 如果我們不考慮 $n=1$ 的情况，可以证明

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2+l.$$

这里，l 是任何的数.

事实上，假設第 k 号命题

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+l$$

正确，那末象第 2 頁里证过的一样，第 $k+1$ 号命題

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2+l$$

也就正确．

但是，这个結論显然是荒謬的．

讲到这里，让我們再重复說一遍：数学归納法的证明过程必須包括两个步驟：“当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的”；“假設当 $n=k$ 的时候，这个命題是正确的，那末当 $n=k+1$ 的时候，这个命題也是正确的”．两者缺一不可！缺一不可！

也許有人会間：上面的第一句話要不要改做“当 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 的时候，这个命題是正确的”？

这样的要求是多余的，同时也是不正确的．所以多余，在于除了用 $n=1$ 来驗证以外，还要用 $n=2$ 和 $n=3$ 来驗证，而它的不正确則在于“……”．如果“……”表示試下去都正确，那末試問到底要試到什么地步才算試完呢？

“多余”还可以解釋成我是从 $n=1$，$n=2$，$n=3$ 里看出規律来的，或者希望通过练习熟悉这个公式；但在沒有证明 n 是所有自然数时都对以前就加上“……”，却要不得，这是犯了邏輯上的錯誤！

四　数学归納法的其他形式

数学归納法有不少“变着”．下面我們先来讲几种“变着”

(1) 不一定从 1 开始. 也就是数学归納法里的两句話，可以改成：如果当 $n=k_0$ 的时候，这个命題是正确的，又从假設当 $n=k(k\geqq k_0)$ 时，这个命題是正确的，可以推出当 $n=k+1$ 时，这个命題也是正确的，那末这个命題当 $n\geqq k_0$ 时都正确.

例 1 求証：n 边形 n 个內角的和等于 $(n-2)\pi$.

这里就要假定 $n\geqq 3$.

証明 当 $n=3$ 时，我們知道三角形三个內角的和是 2 直角. 所以，当 $n=3$ 时，命題是正确的.

假設当 $n=k$ $(k\geqq 3)$ 时命題也是正确的. 設 A_1, A_2, ……, A_{k+1} 是 $k+1$ 边形的頂点. 作綫段 A_1A_k, 它把这个 $k+1$ 边形分成两个图形，一个是 k 边形 $A_1A_2\cdots\cdots A_k$, 另一个是三角形 $A_kA_{k+1}A_1$. 并且 $k+1$ 边形內角的和等于后面这两个图形的內角和的和. 就是

$$(k-2)\pi+\pi=(k-1)\pi=[(k+1)-2]\pi.$$

也就是說，当 $n=k+1$ 时这个命題也是正确的. 因此，定理得証.

例 2 求証：当 $n\geqq 5$ 的时候，$2^n>n^2$.

証明 当 $n=5$ 时，

$$2^5=32,\qquad 5^2=25;$$

所以

$$2^5>5^2.$$

假設当 $n=k(k\geqq 5)$ 时这个命題是正确的，那末由

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\times 2^k\\&>2\times k^2\\&\geqq k^2+5k\\&>k^2+2k+1\\&=(k+1)^2,\end{aligned}$$

可知这个命题当 $n=k+1$ 时也是正确的．因此，这个命題对于所有大于或等于 5 的自然数 n 都正确．

例 3　求证：当 $n\geqq -4$ 的时候，$(n+3)(n+4)\geqq 0$.

证明　当 $n=-4$ 时，这个不等式成立．

假設当 $n=k(k\geqq -4)$ 时，这个不等式成立，那末由

$$
\begin{aligned}
&[(k+1)+3][(k+1)+4]\\
&\qquad=(k+4)(k+5)\\
&\qquad=k^2+9k+20\\
&\qquad=(k+3)(k+4)+2k+8\\
&\qquad\geqq(k+3)(k+4),\\
&\qquad\quad(\because \text{当 } k\geqq -4 \text{ 时，} 2k+8\geqq 0.)
\end{aligned}
$$

即得所证．

(2) 第二句話也可以改为“如果当 n 适合于 $1\leqq n\leqq k$ 时，命題正确，那末当 $n=k+1$ 时，命題也正确”．由此同样可以证明对于所有的 n 命題都正确．

例 4　有两堆棋子，数目相等．两人玩耍，每人可以在一堆里任意取几顆，但不能同时在两堆里取，規定取得最后一顆者胜．求证后取者可以必胜．

证明　設 n 是棋子的顆数．当 $n=1$ 时，先取者只能在一堆里取 1 顆，这样另一堆里留下的 1 顆就被后取者取得．所以結論是正确的．

假設当 $n\leqq k$ 时命題是正确的．現在我們来证明，当 $n=k+1$ 时，命題也是正确的．

因为在这种情况下，先取者可以在一堆里取棋子 l 顆 $(1\leqq l\leqq k+1)$，这样，剩下的两堆棋子，一堆有棋子$(k+1)$顆，另一堆有棋子$(k+1-l)$顆．这时后取者可以在較多的一堆里

取棋子 l 顆，使两堆棋子都有 $(k+1-l)$ 顆．这样就变成了 $n=k+1-l$ 的問題．按照規定，后取者可以得胜．由此就証明了对于所有的自然数 n 来說，后取者都可以得胜．

讀者可以自己考虑一下，如果任給两堆棋子，能不能数一下棋子的顆数，就知道誰胜誰負？

(3) 有时，第二句話需要改成“假設当 $n=k$ 的时候，这个命題是正确的．那末当 $n=k+2$ 的时候，这个命題也是正确的”．这时，第一句話仅仅驗证“当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的”就不够了；而要改成：“当 $n=1, 2$ 的时候，这个命題都是正确的．”

例 5 求证：适合于

$$x+2y=n \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0, \text{并且 } x、y \text{ 都是整数}) \quad (1)$$

的解的組数 $r(n)$① 等于

$$\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}[1+(-1)^n].$$

(1)式的解，可以分为两类：“$y=0$”的和“$y\geqq 1$”的．前一类解的組数等于 1；后一类解的組数等于

$$x+2(y-1)=n-2$$

适合于 $x\geqq 0$, $y-1\geqq 0$ (x、y 都是整数)的解的組数 $r(n-2)$．所以

$$r(n)=r(n-2)+1$$

如果仅仅知道当 $n=1$ 时，$r(n)=1$ (这时 $x+2y=1$，所

① 因为适合这个方程的解的組数与 n 有关，所以我們用符号 $r(n)$ 来表示．例如，当 $n=5$ 时，方程有 3 組解，所以 $r(n)=3$．

以适合条件的解只有一組，就是 $x=1$，$y=0$)，就只能推出当 n 是奇数时，$r(n)=\frac{1}{2}(n+1)$，而还不能推出 n 是偶数时的情况．必須再算出，当 $n=2$ 时，

$$x+2y=2$$

有两組解 $x=2$，$y=0$ 和 $x=0$，$y=1$，卽 $r(2)=2$，才能推出当 n 是偶数时，$r(n)=\frac{1}{2}(n+2)$．这样归納法才完整．

作为练习，讀者可以試一試解下面这个比較更复杂的題目：求适合于

$$2x+3y=n \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \text{并且 } x、y \text{ 都是整数})$$

的解的組数．

(4) 一般的，还可以有以下的"变着"：

当 $n=1,2,\cdots\cdots,l$ 时，这个命題都是正确的，并且証明了"假設当 $n=k$ 时，这个命題正确，那末当 $n=k+l$ 时，这个命題也正确"，于是当 n 是任何自然数时，这个命題都是正确的．

例 6 求証：适合于

$$x+ly=n \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \text{并且 } x、y \text{ 都是整数})$$

的解的組数等于 $\left[\frac{n}{l}\right]+1$．这里符号 $\left[\frac{n}{l}\right]$ 表示商 $\frac{n}{l}$ 的整数部分．

証明留給讀者．

数学归納法的"变着"还有不少，讀者以后还会看到"反向归納法"、"翘翘板归納法"等等．

五 归納法能帮助我們深思

大家都知道，数学归納法有帮助我們"进"的一面．現在我想談談数学归納法帮助我們"退"的一面．把一个比較复杂的問題，"退"成最簡单最原始的問題，把这个最簡单最原始的問題想通了、想透了，然后再用数学归納法来一个飞跃上升，于是問題也就迎刃而解了．

我們还是举一个具体的例子来談．

这是一个有趣的数学游戏．但它充分說明了，一个人会不会应用数学归納法，在思考問題上就会有很大的差异．不会应用数学归納法的人，要想解决这个問題着实要些"聪明"，但是融会貫通地掌握了数学归納法的人，解决这个問題就不需要多少"聪明"．

問題是这样的：

有一位老师，想辨別出他的三个得意門生中哪一个更聪明一些，他采用了以下的方法．事先准备好5頂帽子，其中3頂是白的，2頂是黑的．在試驗时，他先把这些帽子让学生們看了一看，然后要他們閉上眼睛，替每个学生戴上一頂白色的帽子，并且把2頂黑帽子藏了起来，最后再让他們張开眼睛，請他們說出自己头上戴的帽子，究竟是哪一种顏色．

三个学生相互看了一看，躊躇了一会儿，然后他們异口同声地說，自己头上戴的是白色的帽子．

他們是怎样推算出来的呢？他們怎样能够从別人头上戴的帽子的顏色，正确地推断出自己头上戴的帽子的顏色的呢？

建議讀者，讀到这儿，暂时把书擱下来，自己想一想．能够想出来嗎？如果一时想不出，可以多想一些时候．

× × ×

现在，我把謎底揭曉一下：甲、乙、丙三个学生是怎样想的．

甲这样想①：｛如果我头上戴的是黑帽子，那末乙一定会这样想：［如果我头上戴的是黑帽子，那末丙一定会这样想：（甲乙两人都戴了黑帽子，而黑帽子只有两頂，所以自己头上戴的一定是白帽子．）这样，丙就会脫口而出地說出他自己头上戴的是白帽子．但是他为什么要躊躇？可見自己〈指乙〉头上戴的是白帽子．］如果这样乙也会脫口而出地說出他自己头上戴的是白帽子．但是他为什么也要躊躇呢？可見自己〈指甲〉头上戴的不是黑帽子．｝

經过这样思考，于是三个人都推出了自己头上戴的是白帽子．

讀者讀到这儿，請再想一下．想通了沒有？有些伤脑筋吧！

学过数学归納法的人会怎样想呢？他会先退一步，（善于"退"，足够地"退"，"退"到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个訣巧！）不考虑三个人而仅仅考虑两个人一頂黑帽子的問題．这个問题誰都会解，黑帽子只有一頂，我戴了，他立刻会說："自己戴的是白帽子"．但是，他为什么要躊躇呢？可見我戴的不是黑帽子而是白帽子．

这就是說，"两个人，一頂黑帽子，不管多少（当然要不少

① 为了讀者容易看懂，这里加上了一些括号．｛ ｝里的是甲的想法，［ ］里的是甲設想乙应当有的想法，（ ）里的是甲設想乙应当为丙設想的想法．

于 2）頂白帽子”的問題，是一个輕而易举的問題．

現在我們来解上面这个較复杂的："三个人，两頂黑帽子，不管多少（当然要不少于 3）頂白帽子"的問題也就容易了．为什么呢？如果我头上戴的是黑帽子，那末对于他們两人来說，就变成"两个人，一頂黑帽子"的問題，这是他們两人应当立刻解决的問題，是不必躊躇的．現在他們在躊躇，就說明了我头上戴的不是黑帽子而是白帽子．

这里可以看到，学会了数学归納法，就会得运用"归納技巧"从原来問題里减去一个人、一頂黑帽子，把它轉化为一个簡单的問題．

倘使我們把原来的問題再搞得复杂一些："四个人，三頂黑帽子，若干（不少于 4）頂白帽子"．解这个問題，如果仍旧用我們开始时的叙述方法，那末一定要說成："甲想……{乙想……[丙想……（丁想〈……〉）]}等等"．这样讲起来多費事，簡直象"拗口令"，使人不易听清，不易搞懂．但是掌握了数学归納法，善于"退"，那就只要用几句話就可了事，"如果我头上戴的是黑帽子，那末对他們三个人来說，是'三个人，两頂黑帽子，若干頂白帽子'的問題．这个問題他們立刻会解决而不必躊躇．現在他們要躊躇，正是說明我戴的不是黑帽子而是白帽子．"換句話說，"如果我头上戴的是黑帽子"就是这里的归納法假定．

豈特四个人三頂黑帽子，即使象"n 个人，$n-1$ 頂黑帽子，若干（不少于 n）頂白帽子"这样复杂的問題，我們也可以很簡单地解决了．因为当 $n=2$ 时已經解决了，假設当 $n=k$ 时問題已經解决，那末当 $n=k+1$ 时，只要有 1 人戴的是黑帽子，就变成 $n=k$ 的問題，大家都会应用数学归納法，他們应当

都說出他們自己头上戴的是白帽子，但是他們要躊躇，所以这个人就可以判断出自己头上戴的是白帽子.

讀到这儿，讀者可能領会到两点：

(1) 应用归納法可以处理多么复杂的問題！懂得它的人，比不懂它的人岂不是"聪明"得多.

(2) 归納法的原則，不但指导我們"进"，而且还教会我們"退".把問題"退"到最朴素易解的情况，然后再用归納法飞跃前进. 这样比学会了"三人問題"，搞"四人問題"，搞通了"四人問題"再尝試"五人問題"的做法，不是要爽快得多！

当然，我們也不能完全排斥步步前进的做法.当我們看不出归納綫索的时候，先一步一步地前进，也还是必要的。

六 "題"与"解"

数学里，有时候出題容易解題难。凡事問一个为什么，有时候要回答出来確不容易. 但也有时候，出題困难解題易. 題目本身就包括了解題的方法，难不难在解，而难在怎样想出这个題目来. 最显著的是用归納法来证明一些代数恒等式. 这时，难不难在应用归納法来证明，而难在怎样想出这些恒等式来. 本书开始时所举的例子，就是：人家怎样想出

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$
$$=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$$

来的？

一般地說：求证一个形如

$$a_1+\cdots\cdots+a_n=S_n \tag{1}$$

的恒等式，本身就建議我們求证"$a_{n+1}+S_n=S_{n+1}$"或者"$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$"．而一般讲来由"a"求"S"較难，由"S"求"a"較易．并且如果证明了

$$S_{n+1}-S_n=a_{n+1},$$

我們还可以把級数(1)写成

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\\&=S_1+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots\cdots+(S_n-S_{n-1})\\&=S_n.\end{aligned}$$

交叉消去即得所求．(注意：上面这个等式的成立也要用归納法加以证明才合乎严格要求．)

下面我們举些例子：

例 1　求证：

$$\begin{aligned}&4\cdot7\cdot10+7\cdot10\cdot13+10\cdot13\cdot16+\cdots\cdots\\&\quad+(3n+1)(3n+4)(3n+7)\\&=\frac{1}{12}[(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)\\&\quad-1\cdot4\cdot7\cdot10].\ (n\geqq1)\end{aligned}$$

看了这个公式，就可以知道：一定会有$a_n=S_n-S_{n-1}$，也就是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}[(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)\\&\quad-(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)]\\&=(3n+1)(3n+4)(3n+7).\end{aligned}$$

一算眞对．我們就可以用交叉消去法(或者归納法)来证明这个公式了．

例 2 求证:

$$\frac{1}{3\cdot7\cdot11}+\frac{1}{7\cdot11\cdot15}+\frac{1}{11\cdot15\cdot19}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3\cdot7}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right).\quad(n\geqq1)$$

这个恒等式可以由

$$\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right]$$

$$=\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$$

推出.

例 3 求证:

$$\sin x+\sin 2x+\cdots\cdots+\sin nx$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x\sin\frac{1}{2}nx}{\sin\frac{1}{2}x}.\quad(n\geqq1)$$

从这个恒等式可以得到启发:

$$\frac{\left[\sin\frac{1}{2}(n+1)x\sin\frac{1}{2}nx-\sin\frac{1}{2}nx\sin\frac{1}{2}(n-1)x\right]}{\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}nx\left[\sin\frac{1}{2}(n+1)x-\sin\frac{1}{2}(n-1)x\right]}{\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=2\sin\frac{1}{2}nx\cos\frac{1}{2}nx=\sin nx.$$

反过来，可以用这个等式来证明原来的恒等式.

用同样的方法，我們可以处理以下的題目:

例 4 求证:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}. \quad (n\geqq 0)$$

例 5 求证:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg} x. \quad (n\geqq 1)$$

(这里，x 不等于 π 的整数倍)

例 6 求证:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cdots\cos 2^n\alpha$$

$$=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}. \quad (n\geqq 0)$$

这些例題的真困难不是在于旣得公式之后去寻求它們的证明，而是在于这批恒等式是怎样获得的.

我国古代堆垛术所得出的一些公式，也都属于这一类.

例 7 求证：当 $n\geqq 1$ 的时候，

$$1+(1+9)+(1+9+25)+\cdots\cdots$$

$$+[1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{3}\left[n^2(n+1)^2-\frac{1}{2}n(n+1)\right].$$ [①]

---

① 陈世仁(1676—1722).

以下五題采自元朱世杰：算学启蒙（1299），四元玉鉴（1303）。

例 8 $a+2(a+b)+3(a+2b)+\cdots\cdots+n[a+(n-1)b]$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)[2bn+(3a-2b)].\quad(n\geqq 1)$$

例 9 $[a+(n-1)b]+2[a+(n-2)b]+\cdots\cdots$

$$+(n-1)(a+b)+na$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)[bn+(3a-b)].\quad(n\geqq 1)$$

作为练习，讀者可以試由例 8 直接推出例 9 来；試用两两相加两两相减找出例 8 例 9 的恒等式来。

例 10 $a+3(a+b)+6(a+2b)+\cdots\cdots$

$$+\frac{n}{2}(n+1)[a+(n-1)b]$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[3bn+(4a-3b)].\quad(n\geqq 1)$$

例 11 $[a+(n-1)b]+3[a+(n-2)b]+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{2}n(n-1)(a+b)+\frac{1}{2}n(n+1)a$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)[bn+(4a-b)].\quad(n\geqq 1)$$

例 12 在級数

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots$$

里，如果 a_n 是它的第 n 項，那末

$$a_{2l}=3l^2,\qquad a_{2l-1}=3l(l-1)+1.$$

这里 l 是大于或者等于 1 的整数．求证：

$$S_{2l-1}=\frac{1}{2}l(4l^2-3l+1);$$

$$S_{2l}=\frac{1}{2}l(4l^2+3l+1).$$

最后一題启发我們想到归納法的另一"变着"："翹翹板归納法"——有两个命題 A_n、B_n，如果"A_1 是正确的"，"假設 A_k 是正确的，那末 B_k 也是正确的"，"假設 B_k 是正确的，那末 A_{k+1} 也是正确的"，那末，对于任何自然数 n，命題 A_n、B_n 都是正确的.

这里命題 A_n 是"$S_{2n-1}=\frac{1}{2}n(4n^2-3n+1)$"，而命題 B_n 是"$S_{2n}=\frac{1}{2}n(4n^2+3n+1)$".

显而易見，A_1 是正确的，即 $S_1=1$.

假設 $S_{2k-1}=\frac{1}{2}k(4k^2-3k+1)$，那末

$$S_{2k}=\frac{1}{2}k(4k^2-3k+1)+3k^2=\frac{1}{2}k(4k^2+3k+1).$$

这就是說，假設 A_k 是正确的，那末 B_k 也是正确的.

又假設 $S_{2k}=\frac{1}{2}k(4k^2+3k+1)$，那末

$$S_{2k+1}=\frac{1}{2}k(4k^2+3k+1)+3k(k+1)+1$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)[4(k+1)^2-3(k+1)+1].$$

这也就是說，假設 B_k 是正确的，那末 A_{k+1} 也是正确的.

因此，A_n、B_n 对于任何自然数 n，都是正确的.

这个題目是朱世杰研究圜錐垛积得出来的．但照上面这样写下来，就显得有些造作了.

不仅出现过“翹翹板归納法”，而且还出现过若干結輪螺旋式上升的証明方法．例如：有5个命題 A_n、B_n、C_n、D_n、E_n，現在知道 A_1 是正确的，又 $A_k\to B_k$①，$B_k\to C_k$，$C_k\to D_k$，$D_k\to E_k$，并且 $E_k\to A_{k+1}$，这样，这五个命題就都是正确的．

七　递归函数

上节里我們的主要依据是

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=S_n \tag{1}$$

和

$$S_n-S_{n-1}=a_n \tag{2}$$

的关系．这启发了我們，如果知道了(2)，就可以作出一个(1)来．例如，我們知道了公式：

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1},$$

由此就可以作出一个恒等式：

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}+\cdots\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}.$$

关系式(2)本身就可以看成是用数学归納法来定义 S_n．就是：

已知 $S_1=a_1$，假設已知 S_{k-1}，那末由 $S_k=S_{k-1}+a_k$ 就定义了 S_k．

---

① 我們用 $A_k\to B_k$ 表示“假設 A_k 是正确的，那末 B_k 也是正确的．”

这是所謂递归函数的一个例証.

一般来説，递归函数是一个在正整数集上定义了的函数 $f(n)$．首先，$f(1)$ 有定义；其次，如果知道了 $f(1), f(2), \cdots\cdots, f(k)$，那末 $f(k+1)$ 也就完全知道了．这实在不是什么新东西，而只是数学归納法的重申．

例如，由

$$\begin{cases} f(k+1)=f(k)+k, \\ f(1)=1 \end{cases}$$

定义了一个递归函数．通过計算，可以知道 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=4$，$f(4)=7$，……，从而可以得出这个递归函数就是

$$f(k)=\frac{1}{2}k(k-1)+1.$$

这个等式一下就变为一个需要"证明"的問題．而由数学归納法可以知道：对于所有正整数 n，有

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n-1)+1.$$

本节开始时的例子，就是求解：

$$\begin{cases} f(k)-f(k+1)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k^2+k+1}, \\ f(1)=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

跟数学归納法一样，递归函数也可以有各种形式的"变着"．例如，由关系式

$$f(k+1)=3f(k)-2f(k-1)$$

所定义的 $f(k)$，就必須由两个已知值，例如 $f(0)=2$，$f(1)=3$

开始.

现在我們来证明这样的开始值:

$$f(n)=2^n+1.$$

证明: 当 $n=0$, 1 的时候, 这个結論显然正确.

假設已知 $f(k)=2^k+1$, $f(k-1)=2^{k-1}+1$, 那末

$$f(k+1)=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)$$
$$=2^{k+1}+1.$$

由此命題得证.

上面的这个解答 $f(n)=2^n+1$ 又是怎样想出来的呢? 可能是从 $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(2)=5$ 等等归納出来的, 但是从

$$f(k+1)-f(k)=2[f(k)-f(k-1)]$$

来看, 却会更容易一些.

我們設

$$g(k)=f(k+1)-f(k),$$

那末由

$$g(1)=2,$$
$$g(k+1)=2g(k),$$

可見

$$g(k)=2^k.$$

再由

$$f(k)-f(k-1)=2^{k-1},$$

得出

$$f(n)-f(0)=\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]①$$

---

① "$\sum$" 是和的符号, 讀做 "Sigma".

$\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$ 就是表示下面的和:

$$[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]$$
$$+\cdots\cdots+[f(n)-f(n-1)].$$

也就是順次用 1, 2, 3, ……, n 代替 $[f(k)-f(k-1)]$ 里的 k, 再把这 n 个差 $[f(1)-f(0)]$, $[f(2)-f(1)]$, ……, $[f(n)-f(n-1)]$ 加起来.

下文里我們經常要使用这个符号, 讀者必須熟悉它.

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\
&=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1} \\
&=2^n-1.
\end{aligned}
$$

从而可得

$$f(n)=2^n+1.$$

八 排列和組合

数学归納法最簡单的应用之一，是用来研究排列和組合的公式.

讀者在中学代数課程中，已經知道："从 n 个不同的元素里，每次取 r 个，按照一定的顺序擺成一排，叫做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的排列." 排列的种数，叫做排列数. 从 n 个不同元素里每次取 r 个元素所有不同的排列数，可以用符号 A_n^r 来表示. 对于 A_n^r 有下面的公式：

定理 1 $A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$. (1)

当时，这个公式并沒有作严格的证明，現在我們利用数学归納法来证明它.

证明 首先，$A_n^1=n$.

这是显然的. 如果再能证明

$$A_n^r=nA_{n-1}^{r-1},$$

那末，这个定理就可以应用数学归納法来证明①.

---

① 因为当 $n=1$ 的时候，这个定理显然是正确的；假設当 $n=k-1$ 的时候，这个定理是正确的，那末

$A_k^r=kA_{k-1}^{r-1}=k[(k-1)(k-2)\cdots\cdots(k-r+1)]$. (这里，$1<r<k$)

所以，当 $n=k$ 的时候，这个定理也是正确的.

我們假定 n 个元素是 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，在每次取出 r 个元素的 A_n^r 种排列法里，以 a_1 为首的共有 A_{n-1}^{r-1} 种，以 a_2 为首的同样也有 A_{n-1}^{r-1} 种，由此即得

$$A_n^r = nA_{n-1}^{r-1}.$$

于是定理得证.

定理 1 的特例是 n 个元素全取的排列数，它是

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

我們用符号 $n!$ 表示这个乘积，就是

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot(n-1)n.$$

这样，定理 1 就可以写成

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

现在我們来研究更一般的情况：

n 个元素里，有若干个是同类的，其中有 p 个 a，q 个 b，$\cdots\cdots$. 求每次全取这些元素所作成的排列种数. 答案是：

$$N = \frac{n!}{p!\,q!\cdots\cdots}.$$

这个結論可以这样来证明：

如果在 p 个 a 上标上号数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$，作为不同的元素，$q$ 个 b 上标上号数 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_q$，也作为不同的元素，$\cdots\cdots$. 这样問題就变成了 n 个不同元素全取的排列，得出的排列数是

$$P_n = n!.$$

把 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$ 这 p 个元素任意排列的排列数是 $p!$. 但是实际上这 p 个元素是相同的元素，是分辨不出的，所以擦去了标号之后，原来的 $p!$ 个排列只变成了 1 个排列. 因此擦去 a

的編号以后，排列的种数是

$$\frac{n!}{p!}.$$

同样的，再擦去 b 的标号以后，排列的种数就是

$$\frac{n!}{p!\,q!}$$

等等.

注 我們用一个具体例子来說明．例如，求 $aaab$ 全取排列的种数。

編号以后的排列种数是

$$P_4=4!=24.$$

$a_1a_2a_3b$	$a_1a_2ba_3$	$a_1ba_2a_3$	$ba_1a_2a_3$
$a_1a_3a_2b$	$a_1a_3ba_2$	$a_1ba_3a_2$	$ba_1a_3a_2$
$a_2a_1a_3b$	$a_2a_1ba_3$	$a_2ba_1a_3$	$ba_2a_1a_3$
$a_2a_3a_1b$	$a_2a_3ba_1$	$a_2ba_3a_1$	$ba_2a_3a_1$
$a_3a_1a_2b$	$a_3a_1ba_2$	$a_3ba_1a_2$	$ba_3a_1a_2$
$a_3a_2a_1b$	$a_3a_2ba_1$	$a_3ba_2a_1$	$ba_3a_2a_1$

擦去編号以后，每一直行里的6(3!)种，变成了1种，所以排列种数就成为4种：$aaab$，$aaba$，$abaa$，$baaa$.

由此可見

$$N=\frac{4!}{3!}=\frac{24}{6}=4.$$

讀者在中学代数課程中，还曾知道：从 n 个不同元素里，每次取出 r 个，不管怎样的順序并成一組，叫做从 n 个元素里每次取出 r 个元素的組合．組合的种数，叫做組合数，从 n 个不同元素里每次取出 r 个元素所有不同的組合数，可以用符号 C_n^r 来表示．对于 C_n^r 有下列的公式：

定理 2 $C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$. (2)

这个定理也可以用数学归納法来証明.

証明 首先, $C_n^1=n$.

这是显然的. 如果再能証明当 $1<r<n$ 的时候,

$$C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}, \tag{3}$$

那末,这个定理就可以应用数学归納法来証明①.

我們假定有 n 个不同的元素 a_1, a_2, ……, a_n, 在每次取出 r 个元素的組合里,可以分为两类: 一类含有 a_1, 一类不含有 a_1. 含有 a_1 的組合数, 就等于从 a_2, a_3, ……, a_n 里取 $r-1$ 个元素的組合数,它等于 C_{n-1}^{r-1}; 不含有 a_1 的組合数, 就等于 a_2, a_3, ……, a_n 里取 r 个的組合数,它等于 C_{n-1}^r. 所以

$$C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}②.$$

于是定理得証.

讀者在中学代数課程中学过的二項式定理

$$\begin{aligned}(x+a)^n&=x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots\\&\quad+\cdots\cdots+C_n^ka^kx^{n-k}+\cdots\cdots+C_n^na^n\\&=\sum_{j=0}^{n}C_n^ja^jx^{n-j}.\end{aligned}$$

就是利用組合的知識来証明的.

---

① 因为当 $n=1$ 的时候,这个定理是正确的; 假設当 $n=k-1$ 的时候,这个定理是正确的,那末

$$C_k^r=C_{k-1}^r+C_{k-1}^{r-1}=\frac{(k-1)!}{r!(k-1-r)!}+\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}$$
$$=\frac{k!}{r!(k-r)!}. \quad (这里, 1<r<k)$$

所以当 $n=k$ 的时候,这个定理也是正确的.

② 公式 $C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$ 是一个十分重要的公式, 詳見拙著《从楊輝三角談起》(中国青年出版社出版).

九　代数恒等式方面的例題

有不少代数恒等式，它的严格证明，需要用到数学归納法．这里先讲几个讀者所熟悉的例子．

例 1　等差数列的第 n 項，可以用公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{1}$$

表示．这里，a_1 是它的首項，d 是公差．

证明　当 $n=1$ 的时候，$a_1 = a_1$，(1)式是成立的．

假設当 $n=k$ 的时候，(1)式是成立的，那末，因为

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= a_1 + (k-1)d + d \\ &= a_1 + [(k+1)-1]d, \end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 的时候，(1)式也是成立的．由此可知，对于所有的 n，(1)式都是成立的．

例 2　等差数列前 n 項的和，可以用公式

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d \tag{2}$$

表示．这里，a_1 是它的首項，d 是公差．

这个公式也可以用数学归納法来证明．

证明　当 $n=1$ 的时候，$S_1 = a_1$，(2)式是成立的．

假設当 $n=k$ 的时候，(2)式是成立的，那末

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$$

$$=\left[ka_1+\frac{1}{2}k(k-1)d\right]+\{a_1+[(k+1)-1]d\}$$
$$=(k+1)a_1+\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]d.$$

所以当 $n=k+1$ 的时候，(2)式也是成立的．由此可知，对于所有的 n，(2)式都是成立的．

注 例 1 里的公式(1)可以直观地得出，但是例 2 里的公式 (2) 又怎样得出的呢？所以从要找出这个公式的角度来考虑，还是象中学代数課本里那样用“顚倒相加”的方法好．而数学归納法的作用只是在找出了这样的公式以后，給以严格的证明．

例 3 等比数列的第 n 項可以用公式

$$a_n=a_1q^{n-1} \tag{3}$$

表示；前 n 項的和可以用公式

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \tag{4}$$

表示．这里，a_1 是它的首項，q 是公比．

这两个公式也都可以用数学归納法来证明（证明留給讀者）．象例 2 一样，公式(4)的导出，当然也还是象中学代数課本里那样用习惯使用的方法，就是把

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots\cdots+a_1q^{n-1},$$
$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots\cdots+a_1q^n$$

两式相減，再把所得差的两边同除以 $q-1$ 来得好．

再談高阶等差級数．在拙著《从楊輝三角談起》一书里提出的不少恒等式，它們都可以用数学归納法证明的．其中最主要的是：

(1) $1+1+1+\cdots\cdots+1=n$；

(2) $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$;

(3) $1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$;

(4) $1+4+10+\cdots\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3);$$

....

这些公式，讀者不妨用数学归納法一一加以驗証.

这些公式是怎样得来的呢？事实上，它們都可以从上节里的公式(3)

$$C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$$

推出. 例如, 取 $r=2$, 就得

$$\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}(n-1)n=n;$$

取 $r=3$, 就得

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1);$$

等等. 这样, 应用第七节里所讲的方法, 就可以从这些公式导出上面的恒等式.

有了这些公式, 把 n^2 写成 $2\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]-n$, 把 n^3 写成 $6\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]-6\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]+n$, 就可以算出

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

作为练习,請讀者先算出这些公式,然后用数学归納法加以证明.

十 差 分

我們把 $f(x)-f(x-1)$ 叫做**函数 $f(x)$ 的差分**. 記做

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x-1). \tag{1}$$

例如, $f(n)=C_n^r$, 它的差分就是

$$\begin{aligned}\Delta f(n)&=f(n)-f(n-1)\\&=C_n^r-C_{n-1}^r\\&=C_{n-1}^{r-1}.\ [\text{应用第八节里的公式(3).}]\end{aligned}$$

前面我們所讲的求和問題

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=S_n,\quad [=f(n)]$$

可以看做給了差分 $a_n=g(n)$, 求原函数 $f(n)$, 使

$$f(n)-f(n-1)=g(n) \tag{2}$$

的問題. 方程(2)叫做**差分方程**.

用数学归納法的眼光来看,(2)式不过說出了归納法的第二句話:"如果知道了 $f(n-1)$, 那末可以定出 $f(n)$[$f(n)=f(n-1)+g(n)$]来. 所以只有(2)式还不能完全定义 $f(n)$, 还必須添上一句:"$f(0)$ 如何". 加上了这句話,归納法的程序完成了,因而对于所有的自然数 n, 函数 $f(n)$ 都定义了.

函数 $f(x)$ 的差分 $\Delta f(x)=f(x)-f(x-1)$, 还是 x 的函

数. 我們可以再求它的差分, 这就引出了二阶差分的概念. 就是

$$\Delta(\Delta f(x))=\Delta(f(x)-f(x-1)).$$

我們用 $\Delta^2 f(x)$ 来表示.

一般的, 如果对函数 $f(x)$ 的 $r-1$ 阶差分再求差分, 就得到了 $f(x)$ 的 r 阶差分. 就是

$$\Delta^r f(x)=\Delta(\Delta^{r-1}f(x)). \tag{3}$$

現在我們用数学归納法来証明下面的恒等式:

$$\Delta^n f(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f(x-j)①. \tag{4}$$

証明 当 $n=1$ 的时候, (4)式就表示

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x-1),$$

命題显然正确.

假設当 $n=k$ 的时候, (4) 式是成立的, 那末当 $n=k+1$ 的时候,

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1}f(x)&=\Delta(\Delta^k f(x))\\&=\Delta\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j f(x-j)\right)\\&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j \Delta f(x-j)\\&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j [f(x-j)-f(x-j-1)]\end{aligned}$$

---

① $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f(x-j)$

$=f(x)-C_n^1 f(x-1)+C_n^2 f(x-2)$

$-\cdots\cdots+(-1)^n C_n^n f(x-n).$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j)$$

$$-\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j-1)\text{ ①}$$

$$=\left[f(x)+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j)\right]$$

$$+\left[\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j-1}f(x-j)\right.$$

$$\left.+(-1)^{k+1}f(x-k-1)\right]$$

$$=f(x)+(-1)^{k+1}f(x-k-1)$$

$$+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}(C_{k}^{j}+C_{k}^{j-1})f(x-j)$$

$$=f(x)+(-1)^{k+1}f(x-k-1)$$

---

① $\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j)=C_{k}^{0}f(x)-C_{k}^{1}f(x-1)+C_{k}^{2}f(x-2)$

$$-\cdots\cdots+(-1)^{k}C_{k}^{k}f(x-k)$$

$$=f(x)+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j);$$

$$-\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j-1)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}C_{k}^{j}f(x-j-1)$$

$$=-C_{k}^{0}f(x-1)+C_{k}^{1}f(x-2)-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{k}C_{k}^{k-1}f(x-k)+(-1)^{k+1}C_{k}^{k}f(x-k-1)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j-1}f(x-j)+(-1)^{k+1}f(x-k-1).$$

$$+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}C_{k+1}^{j}f(x-j)①$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{j}C_{k+1}^{j}f(x-j).$$

于是定理得证.

如果$f(x)$是x的多項式，那末經过一次差分，多項式的次数就降低1次，因此对于任何一个次数低于k次的多項式，經过k次差分，一定等于0．也就是說，如果$f(x)$是次数低于k次的多項式，那末

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}C_{k}^{j}f(x-j)=0. \tag{5}$$

特别的，当$x=k$的时候，取$k-j=l$，那末

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}C_{k}^{l}f(l)=0. \tag{6}$$

一阶差分方程

$$f(x)-f(x-1)=g(x)$$

的解是

$$f(n)-f(0)=\sum_{j=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}g(k).$$

更一般的一阶差分方程

---

① $f(x)+(-1)^{k+1}f(x-k-1)+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}C_{k+1}^{j}f(x-j)$

$=f(x)+(-1)C_{k+1}^{1}f(x-1)+(-1)^{2}C_{k+1}^{2}f(x-2)+\cdots\cdots$

$+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}f(x-k)+(-1)^{k+1}f(x-\overline{k+1})$

$=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{j}C_{k+1}^{j}f(x-j).$

$$af(x)-bf(x-1)=g(x),$$

不妨假定 $a=1$，于是

$$\begin{aligned}f(n)&=g(n)+bf(n-1)\\&=g(n)+b[g(n-1)+bf(n-2)]\\&=g(n)+bg(n-1)+b^2f(n-2)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=g(n)+bg(n-1)+b^2g(n-2)+\cdots\cdots\\&\quad+b^{n-1}g(1)+b^nf(0).\end{aligned}$$

(可以用数学归納法来证明)

二阶差分方程

$$f(x)+\alpha f(x-1)+\beta f(x-2)=g(x), \tag{7}$$

可以变成两次一阶差分方程来解. 因为

$$\begin{aligned}&[f(x)+\lambda f(x-1)]+\mu[f(x-1)+\lambda f(x-2)]\\&=f(x)+(\lambda+\mu)f(x-1)+\lambda\mu f(x-2),\end{aligned}$$

从 $\lambda+\mu=\alpha$, $\lambda\mu=\beta$ 里解出 λ 和 μ 来. 再設

$$h(x)=f(x)+\lambda f(x-1),$$

那末方程(7)就变成先求

$$h(x)+\mu h(x-1)=g(x),$$

再求

$$f(x)+\lambda f(x-1)=h(x)$$

的解了.

例 求差分方程

$$f(x)-3f(x-1)+2f(x-2)=1,$$
$$f(0)=0, \qquad f(1)=1$$

的解.

解 設 $h(x)=f(x)-f(x-1)$，得

$$h(x)-2h(x-1)=1, \qquad h(1)=1.$$

解得

$$h(n)=2^n-1.$$

再从

$$f(x)-f(x-1)=2^x-1, \qquad f(0)=0,$$

解得

$$f(n)=2^{n+1}-n-2.$$

十一　李善兰恒等式

这里，我附带地介紹两个有趣的恒等式。

清末数学家李善兰(1810—1882)曾提出了恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2 C_{n+2k-j}^{2k}=(C_{n+k}^k)^2. \qquad (1)$$

这个恒等式流傳于海外．我們現在借讲过差分性质之便，来证明这个恒等式．

因为

$$C_{n+k}^{n}=\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots\cdots(n+1)}{k!},$$

所以李善兰恒等式(1)是下面这个更一般的恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots\cdots(x-j+1)}{(2k)!}$$
$$=\left[\frac{(x+k)(x+k-1)\cdots\cdots(x+1)}{k!}\right]^2, \qquad (2)$$

在 $x=n$ 时的特殊情形．

現在我們来证明恒等式(2)的成立．

(2)式的左右两边都是x的$2k$次多項式，并且右边的多項式有二重根$x=-l(1\leqq l\leqq k)$，如果我們能够证明：

(i) 左右两边x^{2k}的系数相等，就是

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2=\frac{(2k)!}{k!\,k!};\qquad(3)$$

(ii) 左边也有$x=-l\ (1\leqq l\leqq k)$是它的重根，那末問題就解决了.

先证明(i). 根据二项式定理，得

$$(1+x)^k=\sum_{j=0}^{k}C_k^j x^j.$$

因此，$(1+x)^k\cdot(1+x)^k$里x^k的系数等于

$$\sum_{j+l=k}C_k^j C_k^l=\sum_{j=0}^{k}C_k^j C_k^{k-j}=\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2.$$

另一方面，从

$$(1+x)^k\cdot(1+x)^k=(1+x)^{2k}$$

的展开式里，可知x^k的系数是

$$C_{2k}^k=\frac{(2k)!}{k!\,k!}.$$

所以(3)式成立.

現在再来证(ii).(2)式里左边每一項里都含有因式$x+l$，所以它有根$x=-l$是显然的. 問題只在于证明它有二重根$x=-l$.

因为(2)式左边各項都有因式$x+l$，所以

$$\frac{1}{x+l}\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots\cdots(x-j+1)}{(2k)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{(x+2k-j)(x+2k-j-1)\cdots(x+l+1)(x+l-1)\cdots(x-j+1)}{(2k)!}.$$

我們证明，当 $x=-l$ 时，这个式子的值是 0.

事实上，当 $x=-l$ 时，上式的值等于

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2\frac{[(2k-j-l)(2k-j-l-1)\cdots\cdot 1][(-1)\cdots(-l-j+1)]}{(2k)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\quad\frac{k!}{(k-j)!\,j!}\cdot\frac{(2k-j-l)!\,(l+j-1)!}{(2k)!}(-1)^{l+j-1}$$

$$=(-1)^{l-1}\frac{k!}{(2k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j\frac{(2k-j-l)!\,(l+j-1)!}{(k-j)!\,j!}$$

$$=(-1)^{l-1}\frac{k!}{(2k)!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j(2k-j-l)\cdots\cdots$$

$$(k-j+1)(l+j-1)\cdots\cdots(j+1).\qquad(4)$$

这里

$$(2k-j-l)\cdots\cdots(k-j+1)(l+j-1)\cdots\cdots(j+1)$$

是多項式

$$f(x)=(2k-x-l)\cdots\cdots(k-x+1)(l+x-1)\cdots\cdots(x+1)$$

当 $x=j$ 时的值．而 $f(x)$ 是 x 的

$$(k-l)+(l-1)=k-1$$

次多項式．因此根据上节里的公式(5)(第 38 頁)，可知(4)式等于 0.

由此，我們就证明了(2)式倆是一个恒等式.

施惠同把李善兰恒等式进一步推广为：

設 $l\geq k\geq 0$，l、k 是整数，那末

$$\binom{x+k}{k}\binom{x+l}{l}=\sum_{j=0}^{k}C_k^jC_l^j\binom{x+k+l-j}{k+l}.$$

这里，x 是实数，符号 $\binom{x+k}{k}$ 表示多项式 $\frac{1}{k!}(x+k)(x+k-1)\cdots\cdots(x+1)$.

这个恒等式是怎样想出来的呢？

十二　不等式方面的例题

数学归納法在证明不等式方面，也很有用．下面我們举几个例子．

例 1　求证 n 个非負数的几何平均数不大于它們的算术平均数．

n 个非負数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的几何平均数是

$$(a_1a_2\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}};$$

算术平均数是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}.$$

所以本題就是要求证明：

$$(a_1a_2\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqq\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}. \tag{1}$$

证明　当 $n=1$ 的时候，(1) 式不証自明．如果 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 里有一个等于 0，(1)式也不証自明．

現在假設

$$0<a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n.$$

如果 $a_1=a_n$，那末所有的 a_j $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ 都相等，(1)式也就不証自明．所以我們进一步假設 $a_1<a_n$，并且假設

$$(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\leqq\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1} \qquad (2)$$

成立.显然(2)式的右边$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}<a_n$. 因为

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}=\frac{(n-1)\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}+a_n}{n}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}+\frac{a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n},$$

把等式两边都乘方$n(n>1)$次,并且由

$$(a+b)^n>a^n+na^{n-1}b, \qquad (a>0,b>0)$$

可知

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

$$>\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^n$$

$$+n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$

$$=a_n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\geqq a_n(a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1})$$

$$=a_1a_2\cdots\cdots a_n,$$

所以

$$(a_1a_2\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqq\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

也成立. 于是定理得证.

上面的证明中还説明了,当各数都相等的时候,(1)式才会出現等号.

下面是另一个証法，它提出了数学归納法的另一变着“反向归納法”。

別証 当 $n=2$ 的时候，(1)式是

$$(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\leqq\frac{a_1+a_2}{2}.$$

这可以由 $(a_1^{\frac{1}{2}}-a_2^{\frac{1}{2}})^2\geqq 0$ 直接推出。

現在我們来証明，当 $n=2^p$，p 是任意自然数的时候，定理都是成立的。(用数学归納法)

假設当 $n=2^k$ 的时候，(1)式是成立的，那末

$$\begin{aligned}
&(a_1a_2\cdots\cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}}\\
&=\left[(a_1a_2\cdots\cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}(a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots\cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leqq\frac{1}{2}\left[(a_1a_2\cdots\cdots a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}+(a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots\cdots a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}\right]\\
&\leqq\frac{1}{2}\left[\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right]\\
&=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

所以当 $n=2^{k+1}$ 的时候，(1)式也是成立的。因此，当 $n=2^p$，p 是任何自然数的时候，(1)式都是成立的。

进一步再推到一般的 n。我們在假設当 $n=k$ 的时候，(1)式成立的前提下来証明，当 $n=k-1$ 的时候，它也成立。

取 $a_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}$。因为当 $n=k$ 的时候，(1)式是成立的，所以

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}+a_k}{k}$$

$$\geqq(a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}a_k)^{\frac{1}{k}}$$

$$=\left(a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

两边同除以 $\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}$，得

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\geqq(a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k}}.$$

由此得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{k-1}}{k-1}\geqq(a_1a_2\cdots\cdots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}.$$

卽得所証.

至此定理就完全得到了証明.

例 2 （加权平均）設 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 是 n 个正数，它們的和是 1. 那末，当 $a_v\geqq0$ $(v=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的时候，

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots\cdots a_n^{p_n}\leqq p_1a_1+p_2a_2+\cdots\cdots+p_na_n. \qquad (3)$$

例 1 显然是例 2 在 $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 时的特例. 但例 2 也并未走得很远. 事实上，如果 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 是正有理数，它們的公分母是 l，那末可以記做 $p_v=\frac{m_v}{l}$，而 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n=l$. 我們想要証明的就变成是

$$(a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots\cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{l}}\leqq\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots\cdots+m_na_n}{l}.$$

这就是例 1 里取 m_1 个等于 a_1，m_2 个等于 a_2，$\cdots\cdots$，m_n 个等于 a_n 的特例而已. 也就是，(3)式对适合于 $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ 的任意 n 个正有理数 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 都成立.

讀者如果学过极限的概念，就不难推出(3)式对所有适合于 $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ 的正实数 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 都成立.

例 3 設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 是正数，并且

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots\cdots(x+a_n)$$
$$=x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots\cdots+c_n,$$

这里 c_r 是从 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 里每次任意取 r 个乘起来的总和，它一定含有 C_n^r 項. 而 C_n^r 就是从 n 个元素里每次取 r 个的組合数，也就是

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot\cdots\cdots\cdot r}.$$

現在定义 P_r 是从 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 里每次取 r 个的乘积的平均数，就是

$$P_r=\frac{c_r}{C_n^r}.$$

不难看到，P_1 就是 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的算术平均数，而 P_n 就是 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的几何平均数的 n 次方.

比例 1 更广泛些有以下的結果：

$$P_1\geqq P_2^{\frac{1}{2}}\geqq P_3^{\frac{1}{3}}\cdots\cdots\geqq P_n^{\frac{1}{n}}. \qquad (4)$$

为了方便，我們再定义 $c_0=1$, $P_0=1$. 于是这个結果可以由以下的結果推导出来：

$$P_{r-1}P_{r+1}\leqq(P_r)^2. \ (1\leqq r\leqq n) \qquad (5)$$

我們先用归納法証明(5)式. 当 $n=2$ 的时候，它就是

$$a_1a_2\leqq\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2,$$

所以(5)式一定成立.

假設对于 $(n-1)$ 个数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}$, (5)式是成立的.

而用 c'_r、P'_r 分别表示由这$(n-1)$个数所做成的 c_r、P_r. 又設 $c'_0=P'_0=1$, $c'_n=P'_n=0$, 那末

$$c_r=c'_r+a_nc'_{r-1}\quad(1\leqq r\leqq n)$$

和

$$P_r=\frac{n-r}{n}P'_r+\frac{r}{n}a_nP'_{r-1}.\ (1\leqq r\leqq n)$$

$\left(\text{这里用到了}\ \frac{C^r_{n-1}}{C^r_n}=\frac{n-r}{n},\ \frac{C^{r-1}_{n-1}}{C^r_n}=\frac{r}{n}.\right)$

因此

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1}-P_r^2)=A+Ba_n+Ca_n^2.\ (1\leqq r\leqq n-1)$$

这里

$$A=[(n-r)^2-1]P'_{r-1}P'_{r+1}-(n-r)^2P'^2_r,$$

$$B=(n-r+1)(r+1)P'_{r-1}P'_r$$
$$+(n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1}$$
$$-2r(n-r)P'_{r-1}P'_r,$$

$$C=(r^2-1)P'_{r-2}P'_r-r^2P'^2_{r-1}.$$

由归納法的假定与 $P'_0=P'_0=1$, 易見

$$P'_{r-1}P'_{r+1}\leqq P'^2_r,\ (1\leqq r\leqq n-2)$$

$$P'_{r-2}P'_r\leqq P'^2_{r-1}.\quad(2\leqq r\leqq n-1)$$

由此推得

$$P'_{r-2}P'_{r+1}\leqq P'_{r-1}P'_r.\ (2\leqq r\leqq n-1)$$

因此, 当 $1\leqq r\leqq n-1$ 的时候,

$$A\leqq\{[(n-r)^2-1]-(n-r)^2\}P'^2_r=-P'^2_r,$$

$$B\leqq[(n-r+1)(r+1)+(n-r-1)(r-1)$$
$$-2r(n-r)]P'_{r-1}P'_r=2P'_{r-1}P'_r,$$

$$C \leqq [(r^2-1)-r^2]P'^2_{r-1} = -P'^2_{r-1}.$$

所以

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1}-P_r^2) \leqq -P'^2_r + 2P'_{r-1}P'_r - P'^2_{r-1}$$
$$= -(P'_r - P'_{r-1})^2 \leqq 0.$$

因此

$$P_{r-1}P_{r+1} \leqq P_r^2.$$

即得所证.

再由(5)推出(4)来，由(5)可知

$$(P_0P_2)(P_1P_3)^2(P_2P_4)^3\cdots\cdots(P_{r-1}P_{r+1})^r$$
$$\leqq P_1^2P_2^4P_3^6\cdots\cdots P_r^{2r},$$

得

$$P_{r+1}^r \leqq P_r^{r+1},$$

就是

$$P_r^{\frac{1}{r}} \geqq P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.$$

这就是(4)式.

从这个問題就可以推出:

$$c_{r-1}c_{r+1} < c_r^2. \tag{6}$$

因为由

$$P_{r-1}P_{r+1} \leqq P_r^2$$

得出

$$c_{r-1}c_{r+1} < \frac{(r+1)(n-r+1)}{r(n-r)}c_{r-1}c_{r+1} \leqq c_r^2.$$

所以这是較弱的結論.

由(6)推出，当 $r<s$ 的时候，(要不要用归納法?)

$$c_{r-1}c_s < c_rc_{s-1}. \tag{7}$$

由此也证明了，如果方程

$$x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_n=0$$

只有負根，那末它的系数一定适合于(6)与(7).

十三　几何方面的例題

数学归納法还可以用来证明几何方面的問題．下面我們也举几个例子．

例 1　平面上有 n 条直綫，其中沒有两条平行，也沒有三条經过同一点．求证：它們

(1) 共有 $V_n=\frac{1}{2}n(n-1)$ 个交点；

(2) 互相分割成 $E_n=n^2$ 条綫段；

(3) 把平面分割成 $S_n=1+\frac{1}{2}n(n+1)$ 块．

证明　假設命題在 $n-1$ 条直綫时是正确的．現在来看添上一条直綫后的情况．

新添上去的 1 条直綫与原来的 $n-1$ 条直綫各有 1 个交点，因此

$$V_n=V_{n-1}+n-1.$$

这新添上去的 1 条直綫被原来的 $n-1$ 条直綫分割为 n 段，而它又把原来的 $n-1$ 条直綫每条多分割出一段，因此

$$\begin{aligned}E_n&=E_{n-1}+n+n-1\\&=E_{n-1}+2n-1.\end{aligned}$$

这新添上去的 1 条直綫被分割为 n 段，每段把一块平面分成两块，总共要添出 n 块，因此

$$S_n=S_{n-1}+n.$$

当 $n=1$ 的时候，$V_1=0$，$E_1=1$，$S_1=2$。

因此，

$$
\begin{aligned}
V_n &= (n-1)+V_{n-1} \\
&= (n-1)+(n-2)+V_{n-2} \\
&\cdots\cdots \\
&= (n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1 \\
&= \frac{1}{2}n(n-1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_n &= (2n-1)+E_{n-1} \\
&= (2n-1)+(2n-3)+E_{n-2} \\
&\cdots\cdots \\
&= (2n-1)+(2n-3)+\cdots\cdots+1 \\
&= n^2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= n+S_{n-1} \\
&= n+(n-1)+S_{n-2} \\
&\cdots\cdots \\
&= n+(n-1)+\cdots\cdots+2+2 \\
&= \frac{1}{2}n(n+1)+1.
\end{aligned}
$$

思考題：如果平面上有 n 条直綫，其中 a 条过同一点，b 条过同一点，……，这 n 条直綫分平面为多少份？

例 2　空間有 n 个平面，其中沒有两个平面平行，沒有三个平面相交于同一条直綫，也沒有四个平面过同一个点。求证：它們

(1) 有 $V_n=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 个交点；

(2) 有 $E_n=\frac{1}{2}n(n-1)^2$ 段交綫;

(3) 有 $S_n=n+\frac{1}{2}n^2(n-1)$ 片面;

(4) 把空間分成 $F_n=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 份.

证明 (1) 每三个平面有 1 个交点, 所以共有

$$C_n^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

个交点.

(2) 每两个平面有 1 条交綫, 所以共有

$$C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$$

条交綫. 而每条交綫又被其他 $n-2$ 个平面截为 $n-1$ 段, 因此得

$$E_n=C_n^2\cdot(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)^2.$$

(3) 在每个平面上都有这平面与其他 $n-1$ 个平面的 $n-1$ 条交綫, 而这平面被这 $n-1$ 条交綫割成 $1+\frac{1}{2}n(n-1)$ 块 (例 1). 因此共有

$$S_n=n\left[1+\frac{1}{2}n(n-1)\right]=n+\frac{1}{2}n^2(n-1)$$

片面.

(4) 原来 $n-1$ 个平面已把空間分成为 F_{n-1} 块. 再添上 1 个平面, 这平面上被分为 $1+\frac{1}{2}n(n-1)$ 部分, 每一部分又把一空間块切成两块. 因此得

$$F_n = F_{n-1} + 1 + \frac{1}{2}n(n-1).$$

应用归納法，由

$$F_1 = 2 \text{ 和 } F_{n-1} = \frac{1}{6}[(n-1)^3 + 5(n-1) + 6]$$

即可推得

$$F_n = \frac{1}{6}[(n-1)^3 + 5(n-1) + 6] + 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$= \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

例 3 过同一点的 n 个平面，其中沒有 3 个交于同一条直綫，它們把空間分为 $[n(n-1)+2]$ 份．

证明留給讀者．

与此等价的問題有：

例 4 球面上以球心为中心的圓称为大圓．設有 n 个大圓，其中任何 3 个都不能在球面上有同一个交点，这些大圓把球面分成 $[n(n-1)+2]$ 份．

思考題：依經緯度每隔 30° 作一单位来划分球面，这样划出的区域有多少点、綫、面？

例 5 平面上若干条綫段連在一起組成一个几何图形，其中有頂点，有边（两端都是頂点的綫段，并且綫段中間再沒有別的頂点），有面（四周被綫段所圍繞的部分，并且不是由两个或者两个以上的面合起来的）．如果用 V、E 和 S 分別表示頂点数、边数和面数，求证：

$$V - E + S = 1. \quad (1)$$

证明 我們应用数学归納法．

当 $n=1$ 就是有 1 条綫段的时候，有 2 个点，1 条綫，无

面．也就是

$$V_1=2, \quad E_1=1, \quad S_1=0.$$

所以結論是正确的．

假設对由不多于 k 条綫段組成的图形，这个定理成立，現在証明对由 $(k+1)$ 条綫段組成的图形，这个定理也成立．

添上一条綫可以有好几种添法，但是这条綫是与原来的图形連在一起的，所以至少要有一端在原图形上．根据这一点，我們来考慮以下各种可能情况．

(1) 一端在图形外，另一端就是原来的頂点．这样，点数加上1，綫数加上1，面数不变．这就是要在原来的公式的左边加上 $1-1+0=0$．所以(1)式成立．

(2) 一端在图形外，另一端在某一条綫段上．这样，点数加上2，綫数也加上2（除掉添上的一条綫之外，原来的某一条綫被分为两段），面数不变．因为 $2-2+0=0$，所以(1)式仍成立．

(3) 两端恰好是原来的两頂点．这时，这条綫段把一个面一分为两，即綫、面数各加上1，而点数不变．因为 $0-1+1=0$，所以(1)式仍成立．

(4) 一端是頂点，另一端在一条边上．这时，点数加上1，边数加上2（一条是添的綫，另一条来自把一边一分为两），面数加上1．因为 $1-2+1=0$，所以(1)式仍成立．

(5) 两端都在边上．这时，点数加上2，边数加上3，面数加上1．因为 $2-3+1=0$，所以(1)式仍成立．

綜上所述，可知公式

$$V-E+F=1$$

对于所有的 n 都成立．

十四　自然数的性质

作为本书的結束，这里来談談自然数的性质.

众所周知，自然数就是指

$$1, 2, 3, \cdots\cdots$$

这些数所組成的整体.

对于自然数有以下的性质:

(1) 1 是自然数.

(2) 每一个确定的自然数 a，都有一个确定的随从① a'，a' 也是自然数.

(3) 1 非随从，即 $1 \neq a'$.

(4) 一个数只能是某一个数的随从，或者根本不是随从，即由

$$a' = b',$$

一定能推得

$$a = b.$$

(5) 任意一个自然数的集合，如果包含 1，并且假設包含 a，也一定包含 a 的随从 a'，那末这个集合包含所有的自然数.

这五条自然数的性质是由 Peano 抽象出来的，因此通常把它叫做**自然数的皮亚諾 (Peano) 公理**. 特别的，其中的性质(5)是数学归納法(也称完全归納法)的根据.

現在我們来证明以下的基本性质（也称数学归納法的第

---

① "随从"也叫做后継数，就是紧接在某一个自然数后面的数. 例如，1 的随从是 2; 2 的随从是 3 等等.

1964/6/19

二形式)：

一批自然数里一定有一个最小的数，也就是这个数小于其他所有的数.

证明 在这集合里任意取一个数 n，大于 n 的不必討論了. 我們需要討論的是那些不大于 n 的自然数里一定有一个最小的数.

应用归納法. 如果 $n=1$，它本身就是自然数里的最小的数. 如果这集合里沒有小于 n 的自然数存在，那末 n 就是最小的，也不必討論了. 如果有一个 $m<n$，那末由数学归納法的假設，知道集合里不大于 m 的自然数里一定有一个最小的数存在. 这个数也就是原集合里的最小的数. 即得所証.

反过来，也可以用这个性质来推出“数学归納法”.

假設对于某些自然数命題是不正确的，那末，一定有一个最小的自然数 $n=k$ 使这个命題不正确；也就是，当 $n=k-1$ 的时候，命題正确，而当 $n=k$ 的时候，这个命題不正确. 这与归納法的假定是矛盾的.

“最小数原則”不仅在理論研究上很重要，在具体使用时，有时也比归納法原来的形式为方便. 但在这本书里，不准备加以深論了.